（１）

$a_1 < a_2 < a_3$　かつ　$a_3 > a_4 > a_5$　より　a_3が最大となるので　$a_3 = 5$

$a_1 < a_2 < a_3 = 5$　となる　a_1, a_2の組の取りかたは
$1 \sim 4$　から２つの数の組を選ぶ場合の数と同じなので　${}_4C_2 = 6$通り
ここで決まった　a_1, a_2の組それぞれに対して、
$a_3 = 5 > a_4 > a_5$　となる　a_4, a_5の組はただひとつに決まる。
ゆえに　$a_1 < a_2 < a_3$　かつ　$a_3 > a_4 > a_5$　となるのは　６通り

（２）

$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$　かつ　$a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$　より　a_kが最大となるので　$a_k = n$
$a_1 < a_2 < \cdots < a_k = n$　となる　$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$の組の取りかたは
$1 \sim n-1$　から$k-1$コの数の組を選ぶ場合の数と同じなので　${}_{n-1}C_{k-1}$通り
ここで決まった　$a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$の組それぞれに対して、
$a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$　となる　$a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots, a_n$の組はただひとつに決まる。

ここで　$k = 2, 3, \cdots, n-1$　なので、求める場合の数の総数は

$$\sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} = {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-2} = ({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-2} + {}_{n-1}C_{n-1}) - {}_{n-1}C_0 - {}_{n-1}C_{n-1}$$
$$= (1+1)^{n-1} - {}_{n-1}C_0 - {}_{n-1}C_{n-1} = 2^{n-1} - 2$$

（３）

$n = a_1 > a_2 > \cdots > a_p = 1$　かつ　$1 = a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q$　かつ　$a_q > a_{q+1} > \cdots > a_n$　となるのは
まず　p　を固定して（$p = 2, 3, \cdots, n-2$）まずqだけを動かして考える。
まず　$a_2, a_3, \cdots, a_{p-1}$の$p-2$個の決め方は
$1, n$以外の$n-2$個から$p-2$個取り出す場合の数なので　${}_{n-2}C_{p-2}$通り

次に　残り　$n-p$個　を　$1 = a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q$　かつ　$a_q > a_{q+1} > \cdots > a_n$
と並べればよいが、これは（２）と同様に考えることができる。
つまり　a_q＝残り$n-p$個の最大値　となる。
まず
$q = p+1$　のときは　$a_{p+2} > \cdots > a_n$　となるようにすればよく${}_{n-p-1}C_0$
$q = p+2$　のときは　$a_{p+1} < a_{p+2}$　かつ　$a_{p+2} > a_{p+3} > \cdots > a_n$となるようにすればよく
a_{p+1}の選び方を考えるので　${}_{n-p-1}C_1$通り
$q = p+3$　のときは　$a_{p+1} < a_{p+2} < a_{p+3}$　かつ　$a_{p+3} > a_{p+4} > \cdots > a_n$となるようにすればよく
a_{p+1}, a_{p+2}の選び方を考えるので　${}_{n-p-1}C_2$通り
・・・・・・
$q = n-1$　のときは　$a_{p+1} < a_{p+2} < \cdots < a_{n-1}$　かつ　$a_{n-1} > a_n$となるようにすればよく
$a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots, a_{n-2}$の選び方を考えるので　${}_{n-p-1}C_{n-p-2}$通り
∴求める場合の数は、pを固定したときは
$${}_{n-2}C_{p-2} \times ({}_{n-p-1}C_0 + {}_{n-p-1}C_1 + \cdots + {}_{n-p-1}C_{n-p-2})$$
$$= {}_{n-2}C_{p-2} \times \left\{({}_{n-p-1}C_0 + {}_{n-p-1}C_1 + \cdots + {}_{n-p-1}C_{n-p-2} + {}_{n-p-1}C_{n-p-1}) - {}_{n-p-1}C_{n-p-1}\right\}$$
$$= {}_{n-2}C_{p-2} \times (1+1)^{n-p-1} - 1 = {}_{n-2}C_{p-2} \times (2^{n-p-1} - 1)$$　通り

次に p を動かす、つまり $p=2,3,\cdots,n-2$ をとりうるので

$$\sum_{p=2}^{n-2}\left\{{}_{n-2}C_{p-2}\times(2^{n-p-1}-1)\right\}=\sum_{p=2}^{n-2}{}_{n-2}C_{p-2}\times 2^{n-p-1}-\sum_{p=2}^{n-2}{}_{n-2}C_{p-2}$$

$$=\sum_{p=2}^{n}{}_{n-2}C_{p-2}\times 2^{n-p-1}-{}_{n-2}C_{n-3}\times 2^{0}-{}_{n-2}C_{n-2}\times 2^{-1}-\left(\sum_{p=2}^{n}{}_{n-2}C_{p-2}-{}_{n-2}C_{n-3}-{}_{n-2}C_{n-2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{p=2}^{n}{}_{n-2}C_{p-2}\times 2^{n-p}-(n-2)-\frac{1}{2}-\left\{(1+1)^{n-2}-(n-2)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(2+1)^{n-2}-2^{n-2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-2}-2^{n-2}+\frac{1}{2}$$ 通り