（１）

$C_1 : y = x|x|$　は

（あ）$x \geqq 0$　のとき　$y = x^2$

（い）$x < 0$　のとき　$y = -x^2$

第３象限なので　（い）$x < 0$　を考えればよい。

ゆえに　$C_1 : y = -x^2$　（$x < 0$）　と　$C_2 : y = ax^2 + x - a$　の交点は

$-x = ax^2 + x - a$　$\therefore \{(a+1)x - a\}(x+1) = 0$　$\therefore 0 < a < 1$ を考えると　$x = -1, \dfrac{a}{a+1}$　ただし $\dfrac{a}{a+1} > 0$

第３象限なので　$x < 0$ より　$x = -1$

$y = -x^2$ に代入して　$y = -1$

ゆえに　求める交点は　$(-1, -1)$

（２）

（１）より　C_1 の（い）$x < 0$ の部分と C_2 との交点は　$(-1, -1)$ のみ。

ゆえに、C_1 と C_2 の交点が２箇所となるのは

C_1 の（あ）$x \geqq 0$ の部分と C_2 との交点がただ１つとなるときである。

$y = x^2$　と　$y = ax^2 + x - a$　の交点は　$x^2 = ax^2 + x - a$、$0 < a < 1$　より

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(a-1)(-a)}}{2(a-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{(2a-1)^2}}{2(a-1)} = \frac{-1 \pm |2a-1|}{2(a-1)}$$

ここで　$0 < a < 1$　より　$-1 < 2a - 1 < 1$　であり　$0 \leqq |2a-1| < 1$　なので

$x = \dfrac{-1 \pm |2a-1|}{2(a-1)} > 0$　・・・（＊）

つまり　C_1 の（あ）$x \geqq 0$ の部分と C_2 との交点がただ１つとなるときは

$|2a-1| = 0$　となるときのみ。　$\therefore a = \dfrac{1}{2}$

（３）

（２）より $a = \dfrac{1}{2}$　C_1 と C_2 の交点は　（＊）より　$x = 1$、$y = x^2$ に代入して　$y = 1$　$\therefore (1,1)$

これと（１）より　図を描くと、$a = \dfrac{1}{2}$ のとき　$-1 < x < 1$　において　C_1 は C_2 より上にある。

ゆえに求める面積は

$$\int_{-1}^{1} \left\{x|x| - \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right)\right\}dx = \int_{-1}^{0} \left\{-x^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right)\right\}dx + \int_{0}^{1} \left\{x^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(-\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}(x-1)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$