（１）

$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$　より　$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$ ・・・①

$P_n=\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$　が直線 $x+y=1$　上にある　・・・（＊）

（＊）を数学的帰納法で示す。

（あ）$n=1$ のとき　①より　$x_1+y_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$　となり（＊）は成り立つ。

（い）$n=k$　のとき（＊）が成り立つとすると　$x_k+y_k=1$ ・・・②

$n=k+1$　のとき　条件より

$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3x_k+2y_k\\ x_k+2y_k\end{pmatrix}$ ・・・（＊＊）

なので、②より

$x_{k+1}+y_{k+1}=\frac{1}{4}(3x_k+2y_k+x_k+2y_k)=x_k+y_k=1$

となり、$n=k+1$ のときも成り立つ。

（あ）（い）よりすべての自然数 n について（＊）は成り立つ。

（２）

（１）の過程より

$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3x_k+2y_k\\ x_k+2y_k\end{pmatrix}$

つまり

$4x_{n+1}=3x_n+2y_n$ ・・・③

$4y_{n+1}=x_n+2y_n$ ・・・④

③より　$y_n=\frac{4x_{n+1}-3x_n}{2}$　これを④に代入して整理すると　$4x_{n+2}-5x_{n+1}+x_n=0$

ゆえに

$4x_{n+2}-x_{n+1}=4x_{n+1}-x_n$

ゆえに、これを繰り返し、（＊＊）を用いると

$4x_{n+2}-x_{n+1}=4x_{n+1}-x_n=\cdots=4x_2-x_1=4\cdot\frac{1}{4}(3x_1+2y_1)-x_1=2$

$\therefore 4x_{n+1}-x_n=2$　$\therefore x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{2}$

また　$x_1=\frac{1}{2}$　と　$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{2}$　なので　$x_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(x_n-\frac{2}{3}\right)$　と変形することにより

$x_n-\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$　$\therefore x_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

（３）

（１）（２）より

$$x_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$y_n = 1 - x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

ゆえに

$$x_n \to \frac{2}{3}(n \to \infty) \quad y_n \to \frac{1}{3}(n \to \infty)$$

ゆえに　$P_n = (x_n, y_n) \to \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$　に近づく。