２０２　第３問　解答案 修正版（→（３）の$(b,c,n)=(15,117,3)$の抜け修正）

（１）

$r=\dfrac{b+\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}$　に、$r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, c=5$　を代入して

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{b+\sqrt{5}}{a+\sqrt{5}}$　の両辺を　$2(a+\sqrt{5})$ 倍して、　$(1+\sqrt{5})(a+\sqrt{5})=2(b+\sqrt{5})$

$\therefore (a+5)+(a+1)\sqrt{5}=2b+2\sqrt{5}$　a,b が整数で、$\sqrt{5}$ が無理数なので

$a+5=2b$　かつ　$a+1=2$　$\therefore a=1$　$b=3$

また　$n=r-\dfrac{1}{r}$ に、$r=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　を代入して

$$n=r-\frac{1}{r}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

（２）

$n=r-\dfrac{1}{r}$　に　$r=\dfrac{b+\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}$　を代入して

$$n=\frac{b+\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}-\frac{a+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}}=\frac{(b+\sqrt{c})^2}{(a+\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}-\frac{(a+\sqrt{c})^2}{(a+\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}=\frac{(b^2-a^2)+(2b-2a)\sqrt{c}}{(ab+c)+(a+b)\sqrt{c}}$$

両辺を　$(ab+c)+(a+b)\sqrt{c}$ 倍して

$$n(ab+c)+n(a+b)\sqrt{c}=(b^2-a^2)+(2b-2a)\sqrt{c}$$

a,b が整数、c,n が自然数、$\sqrt{c}$ が無理数なので

$n(ab+c)=b^2-a^2$　かつ　$n(a+b)=2b-2a$
$a=-1$　を代入すると
$n(c-b)=b^2-1$　・・・①　　かつ　$n(b-1)=2b+2$　・・・②

$b-1=0$　とすると　②の　$n(b-1)=2b+2$　が　$0=4$ となり矛盾するので、$b-1\neq 0$ であり、

②の　$n(b-1)=2b+2$　より　$n=\dfrac{2b+2}{b-1}=2+\dfrac{4}{b-1}$

これが自然数となればよいので、
$b-1=1,2,4,-4$　つまり　$b=2,3,5,-3$
$\therefore (b,n)=(2,6)(3,4)(5,3)(-3,1)$

①より　$c=b+\dfrac{b^2-1}{n}$　なので

$(b,c,n)=(2,\dfrac{5}{2},6)(3,5,4)(5,13,3)(-3,5,1)$　c は自然数なので　$(b,c,n)=(3,5,4)(5,13,3)(-3,5,1)$

（3）

$n=r-\dfrac{1}{r}$　に　$r=\dfrac{b+\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}$　を代入して

$$n=\frac{b+\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}}-\frac{a+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}}=\frac{(b+\sqrt{c})^2}{(a+\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}-\frac{(a+\sqrt{c})^2}{(a+\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}=\frac{(b^2-a^2)+(2b-2a)\sqrt{c}}{(ab+c)+(a+b)\sqrt{c}}$$

これが　$-a$　となるので

$\dfrac{(b^2-a^2)+(2b-2a)\sqrt{c}}{(ab+c)+(a+b)\sqrt{c}}=-a$　両辺を　$(ab+c)+(a+b)\sqrt{c}$ 倍して

$$-a(ab+c)-a(a+b)\sqrt{c}=(b^2-a^2)+(2b-2a)\sqrt{c}$$

a,b が整数、c,n が自然数、$\sqrt{c}$ が無理数なので

$-a(ab+c)=b^2-a^2$　・・・③　かつ　$-a(a+b)=2b-2a$　・・・④

④の両辺を　$a(<-1)$ で割ると

$-a-b=\dfrac{2b}{a}-2$　・・・⑤

a,b が整数なので、
$2b=ka$（k は整数）　・・・⑥
となる必要がある。

⑥を⑤に代入して

$-a-\dfrac{ka}{2}=\dfrac{ka}{a}-2=k-2$　両辺2倍して　$-2a-ka=2k-4$　$\therefore -(k+2)a=2k-4$　・・・⑦

ここで　$k+2=0$　とすると　⑦は　$0=-8$　となり矛盾するので　$k+2\neq 0$
∴⑦より

$a=-\dfrac{2k-4}{k+2}=-2+\dfrac{8}{k+2}$　・・・⑧

これが　$a<-1$　を満たす整数となるので
$k+2=-1,-2,-4,-8$　つまり　$k=-3,-4,-6,-10$
∴⑧より　$(a,k)=(-10,-3),(-6,-4),(-4,-6),(-3,-10)$
∴⑥より　$(a,b,k)=(-10,15,-3),(-6,12,-4),(-4,12,-6),(-3,15,-10)$

③より　$c=-ab-\dfrac{b^2-a^2}{a}$　、条件より　$n=-a$　なので、c が自然数となるものだけを抜き出すと

$$(b,c,n)=(12,90,6)(12,80,4)(15,117,3)$$