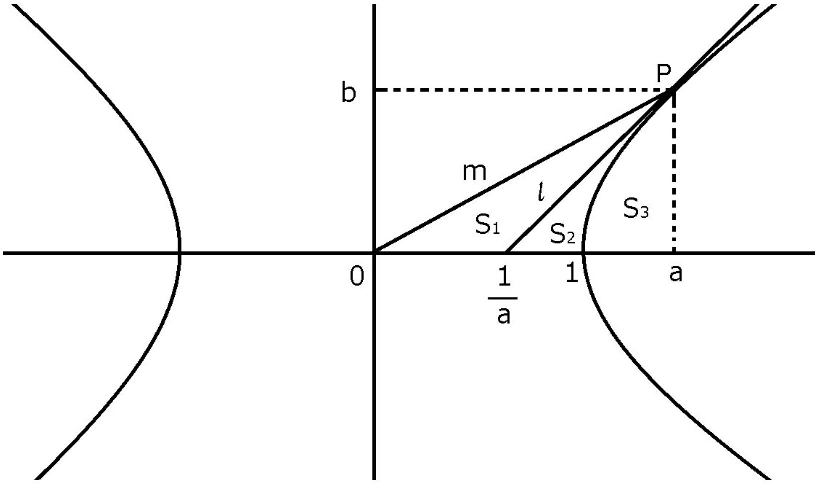
２０２１　２０２　第２問解答案 修正版（→（２）の$x \geqq 0$、$y \geqq 0$の抜け修正）



$x^2-y^2=1$　上の(a,b)における接線lは
$ax-by=1$

となるので、x軸との交点は　$y=0$より$x=\dfrac{1}{a}$

条件を図示すると、上図のようになる。

（１）

上図より　$S_1=\dfrac{1}{a}\times b\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{b}{2a}$

（２）

$$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}-\frac{e^{2t}-2+e^{-2t}}{4}$$

$$=\frac{4}{4}=1$$

となるので、$\big(f(t),g(t)\big)$　は　$x^2-y^2=1$　を満たす。

また、$t\geqq 0$　より　$e^t\geqq 1$　であり、$e^{-t}=\dfrac{1}{e^t}\leqq 1$　$\therefore e^{-t}\leqq 1\leqq e^t$　なので

$$f(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>0、g(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\geqq 0$$

$\therefore\big(f(t),g(t)\big)$　$(t\geqq 0)$は　$C:x^2-y^2=1$　（$x\geqq 0$、$y\geqq 0$）　上にある。

（３）

（２）より　$C: x^2-y^2=1$　（$x \geqq 0$、$y \geqq 0$）上の点は

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}、y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\quad (t \geqq 0)$$

と書ける。

$$\therefore dx=\frac{e^t-e^{-t}}{2}dt$$

$a=\dfrac{e^s+e^{-s}}{2}$ なので、x と t の対応は以下となる。

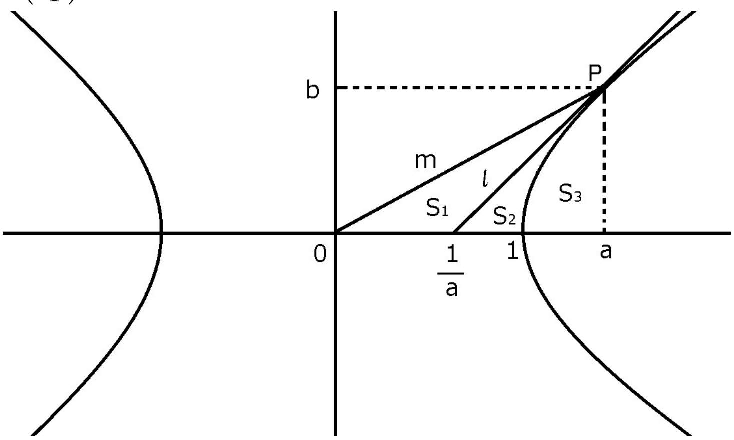
x	$1 \to a$
t	$0 \to s$

$$S_3=\int_1^a ydx=\int_0^s \frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}dt=\frac{1}{4}\int_0^s \left(e^t-e^{-t}\right)^2 dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^s e^{2t}-2+e^{-2t}dt=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^s$$

$$=\frac{1}{8}(e^{2s}-1)-\frac{1}{2}(s-0)-\frac{1}{8}(e^{-2s}-1)=\frac{1}{8}(e^{2s}-e^{-2s})-\frac{1}{2}s$$

（４）



図より　$S_2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\times b\times\dfrac{1}{2}-S_3=\dfrac{ab}{2}-\dfrac{b}{2a}-S_3$

（１）より $S_1=\dfrac{b}{2a}$　なので

$$S_1-S_2=\frac{b}{2a}-\left(\frac{ab}{2}-\frac{b}{2a}-S_3\right)=\frac{b}{a}-\frac{ab}{2}+S_3 \quad ・・・①$$

（３）より

$$S_3=\frac{1}{8}(e^{2s}-e^{-2s})-\frac{1}{2}s \quad ・・・②$$

条件より

$$a=\frac{e^s+e^{-s}}{2}、b=\frac{e^s-e^{-s}}{2} \quad ・・・③$$

①に②と③を代入して

$$S_1-S_2=\frac{b}{a}-\frac{ab}{2}+S_3=\frac{e^s-e^{-s}}{e^s+e^{-s}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^s+e^{-s}}{2}\cdot\frac{e^s-e^{-s}}{2}+\frac{1}{8}(e^{2s}-e^{-2s})-\frac{1}{2}s$$

$$=\frac{e^s-e^{-s}}{e^s+e^{-s}}-\frac{1}{8}(e^{2s}-e^{-2s})+\frac{1}{8}(e^{2s}-e^{-2s})-\frac{1}{2}s=\frac{e^s-e^{-s}}{e^s+e^{-s}}-\frac{1}{2}s$$

$S_1-S_2=T(s)=\dfrac{e^s-e^{-s}}{e^s+e^{-s}}-\dfrac{1}{2}s$ とおくと

$$T'(s)=\frac{\left(e^s+e^{-s}\right)^2-\left(e^s-e^{-s}\right)^2}{\left(e^s+e^{-s}\right)^2}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{e^{2s}+2+e^{-2s}-\left(e^{2s}-2+e^{-2s}\right)}{\left(e^s+e^{-s}\right)^2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{\left(e^s+e^{-s}\right)^2}-\frac{1}{2}$$

$T'(s)=0$ のとき $\dfrac{4}{\left(e^s+e^{-s}\right)^2}-\dfrac{1}{2}=0$ つまり $\left(e^s+e^{-s}\right)^2=8$

つまり $e^s+e^{-s}>0$ なので $e^s+e^{-s}=2\sqrt{2}$ ・・・④

$A=e^s$ として ④は $A+\dfrac{1}{A}=2\sqrt{2}$ 両辺 A 倍して整理すると $A^2-2\sqrt{2}A+1=0$

$\therefore A=e^s=\sqrt{2}\pm1$ $\therefore s=\log(\sqrt{2}\pm1)$

$s>0$ より $s=\log(\sqrt{2}+1)$

増減表を書くと以下のようになる。

s	0	$\cdots$	$s=\log(\sqrt{2}+1)$	$\cdots$
$T'(s)$		$-$	0	$+$
$T(s)$		↗		↘

$$T(\log(\sqrt{2}+1))=\frac{e^{\log(\sqrt{2}+1)}-e^{-\log(\sqrt{2}+1)}}{e^{\log(\sqrt{2}+1)}+e^{-\log(\sqrt{2}+1)}}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1+(\sqrt{2}-1)}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$$

このとき

$$a=\frac{e^{\log(\sqrt{2}+1)}+e^{-\log(\sqrt{2}+1)}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}$$

$$b=\frac{e^{\log(\sqrt{2}+1)}-e^{-\log(\sqrt{2}+1)}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{2}=1$$

以上より　$P(\sqrt{2},1)$ のとき　S_1-S_2　は最大値 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$

（注）
s を出す必要がなければ

$$e^{s}+e^{-s}=2\sqrt{2}\quad\cdot\cdot\cdot④$$

を用いて

$$a=\frac{e^{s}+e^{-s}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$(e^{s}-e^{-s})^2=(e^{s}+e^{-s})^2-4=\left(2\sqrt{2}\right)^2-4=4$$

$$\therefore e^{s}-e^{-s}=\pm 2$$

$b=\dfrac{e^{s}-e^{-s}}{2}>0$　より　$b=\dfrac{e^{s}-e^{-s}}{2}=\dfrac{2}{2}=1\cdot\cdot\cdot③$

と計算するのが自然で楽です。