

(1)

条件より

$$3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$$

$$\therefore 4\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \quad \therefore \overrightarrow{OP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

(2)

$$G \text{ は } \triangle ABC \text{ の重心なので } \overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

 Q は、直線 PG 上にあるので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OG} = (1-s)\left(-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + s \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{3}s\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s + \frac{1}{3}s\right)\vec{b} + \frac{1}{3}s\vec{c} \\ &= \left(\frac{7}{12}s - \frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}s\right)\vec{b} + \frac{1}{3}s\vec{c} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、また Q は、平面 OBC 上にあるので

$$\overrightarrow{OQ} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC} = x\vec{b} + y\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$$

 O, A, B, C が同一平面上にないので、①②より

$$\frac{7}{12}s - \frac{1}{4} = 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{6}s = x, \quad \frac{1}{3}s = y$$

$$\therefore s = \frac{3}{7}, \quad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{14} - \frac{1}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}, \quad y = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \textcircled{2} \text{ より } \overrightarrow{OQ} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$$

(3)

D は、平面 OAC 上を動くので $\overrightarrow{OD} = k\vec{a} + l\vec{c}$ (k, l は実数) と書ける。

(2) より $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$ なので

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QD}|^2 &= |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OQ}|^2 = \left| k\vec{a} + l\vec{c} - \frac{3}{7}\vec{b} - \frac{1}{7}\vec{c} \right|^2 = \left| k\vec{a} - \frac{3}{7}\vec{b} + \left(l - \frac{1}{7} \right) \vec{c} \right|^2 \\ &= k^2 |\vec{a}|^2 + \frac{9}{49} |\vec{b}|^2 + \left(l^2 - \frac{2}{7}l + \frac{1}{49} \right) |\vec{c}|^2 - \frac{6}{7} k\vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{6}{49} - \frac{6}{7}l \right) \vec{b} \cdot \vec{c} + \left(2kl - \frac{2}{7}k \right) \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

ここで、 $O-ABC$ は1辺が2の正四面体であるから

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 2^2 = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

これらを③に代入して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QD}|^2 &= 4k^2 + \frac{36}{49} + \left(4l^2 - \frac{8}{7}l + \frac{4}{49} \right) - \frac{12}{7}k + \left(\frac{12}{49} - \frac{12}{7}l \right) + \left(4kl - \frac{4}{7}k \right) \\ &= 4k^2 + \left(4l - \frac{16}{7} \right) k + \left(4l^2 - \frac{20}{7}l + \frac{52}{49} \right) \\ &= 4 \left\{ k^2 + \left(l - \frac{4}{7} \right) k \right\} + \left(4l^2 - \frac{20}{7}l + \frac{52}{49} \right) \\ &= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 - 4 \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right)^2 + \left(4l^2 - \frac{20}{7}l + \frac{52}{49} \right) \\ &= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 - 4 \left(\frac{1}{4}l^2 - \frac{2}{7}l + \frac{4}{49} \right) + \left(4l^2 - \frac{20}{7}l + \frac{52}{49} \right) \\ &= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 - \left(l^2 - \frac{8}{7}l + \frac{16}{49} \right) + \left(4l^2 - \frac{20}{7}l + \frac{52}{49} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 + 3l^2 - \frac{12}{7}l + \frac{36}{49} \\
&= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 + 3 \left(l^2 - \frac{4}{7}l \right) + \frac{36}{49} \\
&= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 + 3 \left(l - \frac{2}{7} \right)^2 - 3 \cdot \frac{4}{49} + \frac{36}{49} \\
&= 4 \left\{ k + \left(\frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \right) \right\}^2 + 3 \left(l - \frac{2}{7} \right)^2 + \frac{24}{49}
\end{aligned}$$

$$\therefore |\overline{QD}|^2 \text{ は } k = \frac{1}{2}l - \frac{2}{7} \text{ かつ } l = \frac{2}{7} \text{ のとき、最小値 } \frac{24}{49}$$

$$\text{つまり } |\overline{QD}|^2 \text{ は } k = -\frac{1}{7} \text{ かつ } l = \frac{2}{7} \text{ のとき、最小値 } \frac{24}{49}$$

$$|\overline{QD}| \text{ は } k = -\frac{1}{7} \text{ かつ } l = \frac{2}{7} \text{ のとき 最小値 } \frac{2\sqrt{6}}{7}$$