２０１　第４問解答案

（１）

$P_n \to P_{n+1}$　は、A で赤 B で赤、または、A で白 B で白を引けばよい。

$$\therefore P_1 = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$$

（２）

$P_n \to Q_{n+1}$　は、A で白 B で赤を引けばよい。

$$\therefore \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

$P_n \to R_{n+1}$　は、A で赤 B で白を引けばよい。

$$\therefore \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$$

$Q_n \to P_{n+1}$　は、A で赤 B で白を引けばよい。

$$\therefore \frac{2}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{3}$$

$Q_n \to Q_{n+1}$　は、A で白 B で白を引けばよい。

$$\therefore \frac{4}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{2}{3}$$

$Q_n \to R_{n+1}$　は不可能。

$R_n \to P_{n+1}$　は、A で白 B で赤を引けばよい。

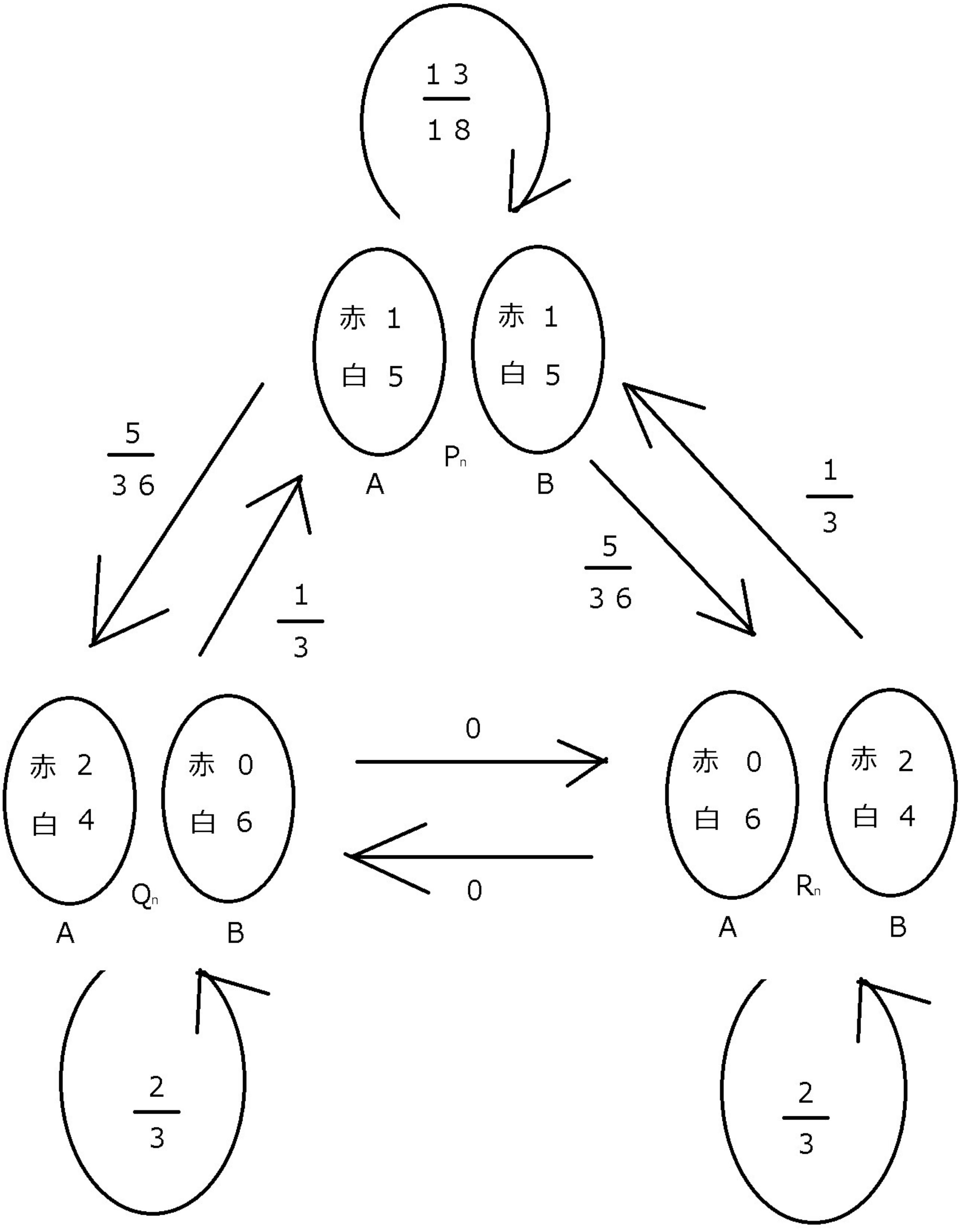
$$\therefore \frac{6}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$R_n \to Q_{n+1}$　は不可能。

$R_n \to R_{n+1}$　は、A で白 B で白を引けばよい。

$$\therefore \frac{6}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

遷移図を書くと以下のようになる。



Q_2 は、（1回後、2回後）＝（P、Q）（Q、Q） のいずれかなので

遷移図より $\dfrac{13}{18}\times\dfrac{5}{36}+\dfrac{5}{36}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{65+60}{18\times 36}=\dfrac{125}{648}$

R_2 は、（1回後、2回後）＝（P、R）（R、R） のいずれかなので

遷移図より $\dfrac{13}{18}\times\dfrac{5}{36}+\dfrac{5}{36}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{65+60}{18\times 36}=\dfrac{125}{648}$

（3）

最初はPで始まるので、対称性より $Q_n=R_n$

また、状態はP、Q、Rのいずれかなので $P_n+Q_n+R_n=1$

$$\therefore Q_n=R_n=\frac{1-P_n}{2}$$

∴遷移図より

$$P_{n+1}=\frac{13}{18}P_n+\frac{1}{3}Q_n+\frac{1}{3}R_n=\frac{13}{18}P_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-P_n}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-P_n}{2}=\frac{7}{18}P_n+\frac{1}{3}$$

（1）より $P_1=\dfrac{13}{18}$

$P_{n+1}=\dfrac{7}{18}P_n+\dfrac{1}{3}$ を変形して $P_{n+1}-\dfrac{6}{11}=\dfrac{7}{18}\left(P_n-\dfrac{6}{11}\right)$

$$\therefore P_n-\frac{6}{11}=\left(P_1-\frac{6}{11}\right)\left(\frac{7}{18}\right)^{n-1}=\left(\frac{13}{18}-\frac{6}{11}\right)\left(\frac{7}{18}\right)^{n-1}=\frac{143-108}{198}\left(\frac{7}{18}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{35}{198}\left(\frac{7}{18}\right)^{n-1}$$

$$\therefore P_n=\frac{35}{198}\left(\frac{7}{18}\right)^{n-1}+\frac{6}{11}$$

（4）

（3）より $Q_n=\dfrac{1-P_n}{2}$、$P_n=\dfrac{35}{198}\left(\dfrac{7}{18}\right)^{n-1}+\dfrac{6}{11}$ なので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{6}{11}$ であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_n}{P_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-P_n}{2P_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2P_n}-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$