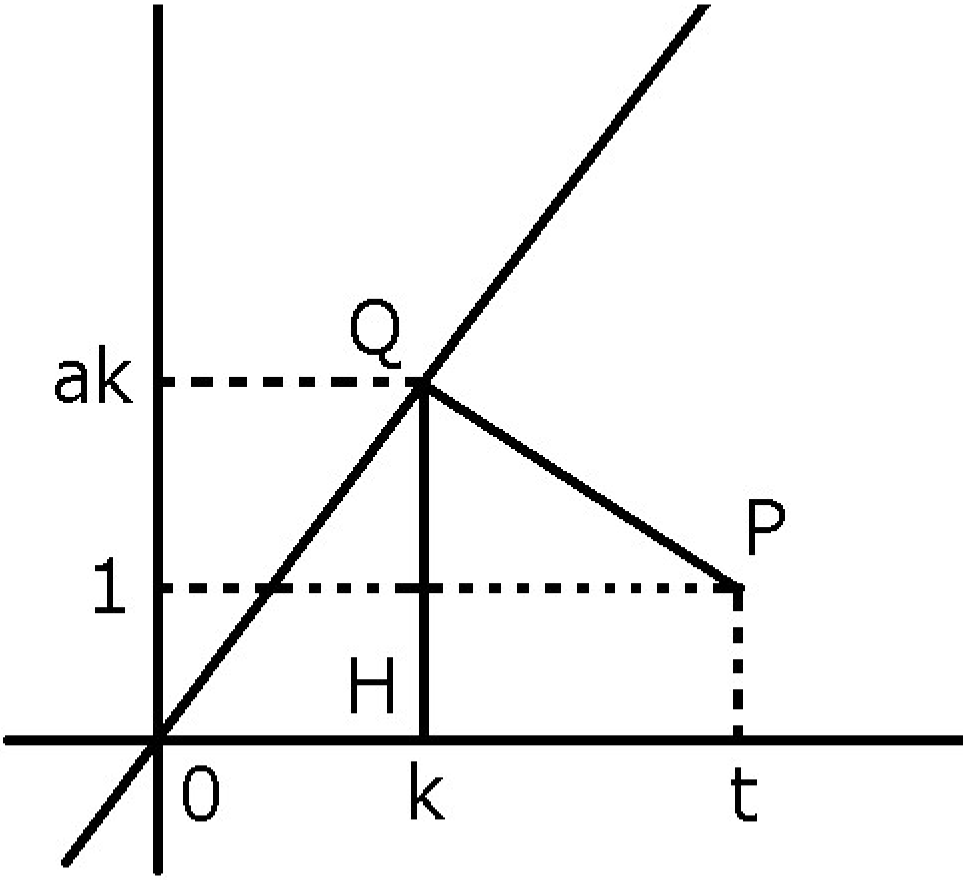
２０２１　２０１　第３問解答案　修正版（→（３）のＱの座標の書き忘れの修正）



（１）

$Q(k, ak)$　とおく（$k \neq 0$）と、$H(k, 0)$　であり、$QH = |ak| = a|k|$　（$\because a > 0$）

$PQ = QH$　より　$\sqrt{(t-k)^2 + (1-ak)^2} = a|k|$

両辺２乗して

$(t-k)^2 + (1-ak)^2 = a^2k^2$

つまり

$t^2 - 2kt + k^2 + 1 - 2ak + a^2k^2 = a^2k^2$

$\therefore t^2 - 2kt + k^2 + 1 - 2ak = 0$

$PQ = QH$ となる Q が１つなので、$t^2 - 2kt + k^2 + 1 - 2ak = 0$　をみたす k が１つである。

これを k について整理すると

$k^2 - 2(a+t)k + t^2 + 1 = 0$　・・・①

これが、$k \neq 0$　にただ１つの解を持てばよい。

（ア）①が $k = 0$　と　$k \neq 0$　の解をもつとき

①に $k = 0$ を代入すると　$t^2 + 1 = 0$　となり不適。

（イ）①が $k \neq 0$　の重解をもつとき

①の判別式 $\dfrac{D}{4} = (a+t)^2 - (t^2+1) = 0$　かつ　①に $k = 0$ を代入すると　$t^2 + 1 \neq 0$

$\therefore a^2 + 2at + t^2 - (t^2+1) = a^2 + 2at - 1 = 0$

$\therefore a=-t\pm\sqrt{t^2-(-1)}=-t\pm\sqrt{t^2+1}$

$a>0$ なので $a=-t+\sqrt{t^2+1}$

（２）

$k^2-2(a+t)k+t^2+1=0$ ・・・①

と解くと

$k=(a+t)\pm\sqrt{(a+t)^2-(t^2+1)}$

$a=-t+\sqrt{t^2+1}$ を代入して

$$k=(-t+\sqrt{t^2+1}+t)\pm\sqrt{(-t+\sqrt{t^2+1}+t)^2-(t^2+1)}$$
$$=\sqrt{t^2+1}\pm\sqrt{(\sqrt{t^2+1})^2-(t^2+1)}$$
$$=\sqrt{t^2+1}$$

$Q(k,ak)$ に $a=-t+\sqrt{t^2+1}$ と $k=\sqrt{t^2+1}$ を代入して

$Q(\sqrt{t^2+1},-t\sqrt{t^2+1}+t^2+1)$

（３）

$$\triangle OQH=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+1}(-t\sqrt{t^2+1}+t^2+1)=-\frac{1}{2}t(t^2+1)+\frac{1}{2}(t^2+1)\sqrt{t^2+1}$$
$$=-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$S(t)=-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$ とおくと

$$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(t^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2t=-\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\sqrt{t^2+1}$$

$S'(t)=0$ とすると $-\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t\sqrt{t^2+1}=0$

つまり $-3t^2-1+3t\sqrt{t^2+1}=0$ $\therefore 3t\sqrt{t^2+1}=3t^2+1$

両辺２乗して

$9t^2(t^2+1)=(3t^2+1)^2$ $\therefore 9t^4+9t^2=9t^4+6t^2+1$

$\therefore 3t^2=1$ $\therefore$ $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $t>0$ より $t=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore t>0$ で $S(t)=-\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$ の増減表を書くと以下のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$S'(t)$		$-$	0	$+$
$S(t)$		↘	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

$\therefore t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　最小値　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

このときのQの座標は（２）より

$Q(\sqrt{t^2+1},-t\sqrt{t^2+1}+t^2+1)$ なので　$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ を代入して

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$ なので

$$Q(\sqrt{t^2+1},-t\sqrt{t^2+1}+t^2+1)=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$$