２０２１　２０１　第２問解答案

（１）
条件より

$$3\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$$

$$\therefore 4\overrightarrow{OP}=-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}\quad \therefore \overrightarrow{OP}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

（２）

G は $\triangle ABC$ の重心なので　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

Q は PG を $s:(1-s)$ に内分するので

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OG}}{s+(1-s)}=(1-s)\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+s\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}s+\frac{1}{3}s\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{3}s\right)\vec{b}+\frac{1}{3}s\vec{c}$$

$$=\left(\frac{7}{12}s-\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}s\right)\vec{b}+\frac{1}{3}s\vec{c}\quad\cdots①$$

また　Q は、平面 OBC 上にあるので

$$\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}=x\vec{b}+y\vec{c}\quad\cdots②$$

O,A,B,C が同一平面上にないので、①②より

$\dfrac{7}{12}s-\dfrac{1}{4}=0$、$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}s=x$、$\dfrac{1}{3}s=y$

$\therefore s=\dfrac{3}{7}$、$x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{7}{14}-\dfrac{1}{14}=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}$、$y=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{1}{7}$

$\therefore$②より　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{7}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

（３）

Dは直線OA上を動くので　$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$　(kは実数)　と書ける。

（２）より　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{7}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$　なので

$$\left|\overrightarrow{QD}\right|^2=\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OQ}\right|^2=\left|k\vec{a}-\frac{3}{7}\vec{b}-\frac{1}{7}\vec{c}\right|^2$$

$$=k^2\left|\vec{a}\right|^2+\frac{9}{49}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{1}{49}\left|\vec{c}\right|^2-\frac{6}{7}k\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{6}{49}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{7}k\vec{a}\cdot\vec{c}\quad\cdots③$$

ここで、$O-ABC$　は１辺が２の正四面体であるから

$$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=2^2=4$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=2\cdot2\cdot\cos60^\circ=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=2$$

これらを③に代入して

$$\left|\overrightarrow{QD}\right|^2=4k^2+\frac{36}{49}+\frac{4}{49}-\frac{12}{7}k+\frac{12}{49}-\frac{4}{7}k=4k^2-\frac{16}{7}k+\frac{52}{49}$$

$$=4\left(k^2-\frac{4}{7}k\right)+\frac{52}{49}=4\left(k-\frac{2}{7}\right)^2-\frac{16}{49}+\frac{52}{49}=4\left(k-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{36}{49}$$

$\therefore\left|\overrightarrow{QD}\right|^2$　は$k=\dfrac{2}{7}$のとき、最小値$\dfrac{36}{49}$　$\therefore\left|\overrightarrow{QD}\right|$は$k=\dfrac{2}{7}$のとき、最小値$\dfrac{6}{7}$