

(1)

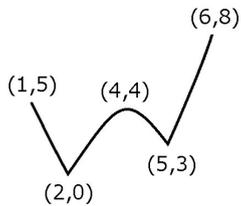
$$f(x) = |x^2 - 7x + 10| + |x - 2| = |(x-2)(x-5)| + |x-2|$$

$$x \leq 2 \text{ のとき } f(x) = (x^2 - 7x + 10) - (x - 2) = x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 16 + 12 = (x-4)^2 - 4$$

$$2 \leq x \leq 5 \text{ のとき } f(x) = -(x^2 - 7x + 10) + (x - 2) = -x^2 + 8x - 12 = -(x-4)^2 + 16 - 12 = -(x-4)^2 + 4$$

$$x \geq 5 \text{ のとき } f(x) = (x^2 - 7x + 10) + (x - 2) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1$$

これらを図示すると以下のようになる。



$1 \leq x \leq 6$ での最大値と最小値は

$1 \leq x \leq 2$ では $x = 1$ で最大値 5 $x = 2$ で最小値 0

$2 \leq x \leq 5$ では $x = 4$ で最大値 4 $x = 2$ で最小値 0

$5 \leq x \leq 6$ では $x = 6$ で最大値 8 $x = 5$ で最小値 3

つまり $x = 6$ で最大値 8 $x = 2$ で最小値 0

(2)

$$x \leq 2 \text{ のとき } f(x) = x^2 - 8x + 12 = x + k \text{ つまり } x^2 - 9x + 12 = k$$

$$\text{つまり } \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} + \frac{48}{4} = k \text{ つまり } \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{33}{4} = k$$

$$2 \leq x \leq 5 \text{ のとき } f(x) = -x^2 + 8x - 12 = x + k \text{ つまり } -x^2 + 7x - 12 = k$$

$$\text{つまり } -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{4} - \frac{48}{4} = k \text{ つまり } -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = k$$

$$x \geq 5 \text{ のとき } f(x) = x^2 - 6x + 8 = x + k \text{ つまり } x^2 - 7x + 8 = k$$

$$\text{つまり } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{32}{4} = k \text{ つまり } \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} = k$$

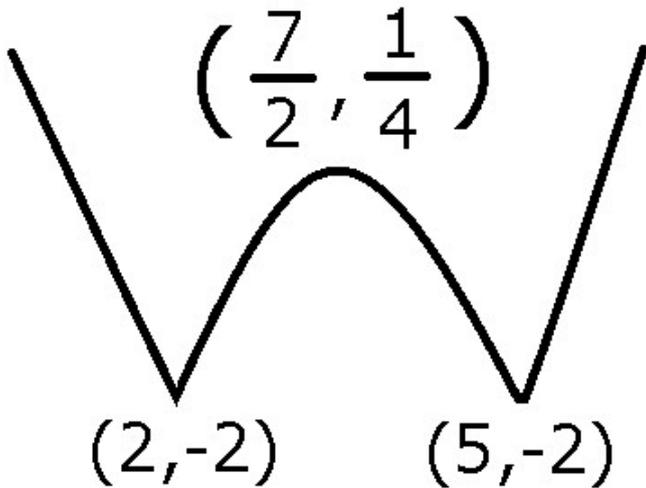
以上より

$$x \leq 2 \text{ のとき } y = x^2 - 9x + 12 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}$$

$$2 \leq x \leq 5 \text{ のとき } y = -x^2 + 7x - 12 = -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$x \geq 5 \text{ のとき } y = x^2 - 7x + 8 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

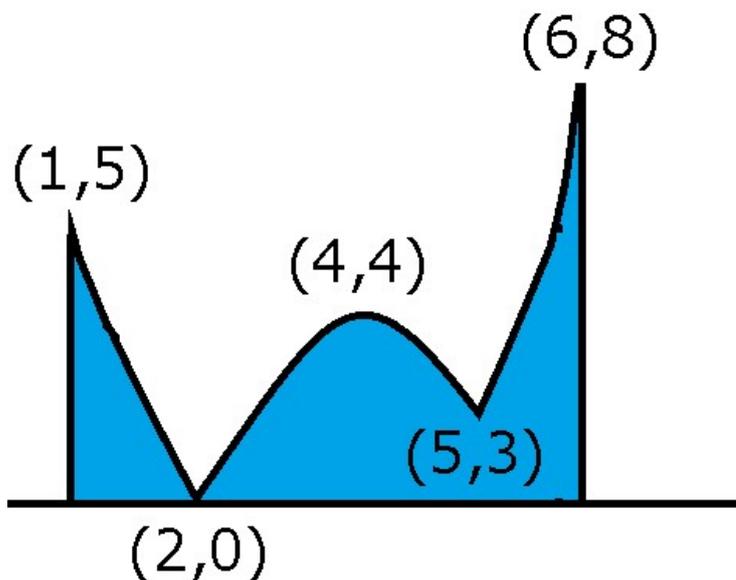
これらを図示すると以下のようになる。



これと $y = k$ の交点が4個になればよいので、 $-2 < k < \frac{1}{4}$

(3)

(1) の考察を用いて $y = f(x)$ と $x = 1$ 、 $x = 6$ 、 x 軸を書き、求める面積部分を図示すると下図のようになる。



$$\begin{aligned}\therefore S &= \int_1^2 x^2 - 8x + 12 dx + \int_2^5 -x^2 + 8x - 12 dx + \int_5^6 x^2 - 6x + 8 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x \right]_2^5 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \right]_5^6 \\ &= \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) - 4(2^2 - 1^2) + 12(2 - 1) - \frac{1}{3}(5^3 - 2^3) + 4(5^2 - 2^2) - 12(5 - 2) \\ &\quad + \frac{1}{3}(6^3 - 5^3) - 3(6^2 - 5^2) + 8(6 - 5) \\ &= \frac{7}{3} - 12 + 12 - \frac{117}{3} + 84 - 36 + \frac{91}{3} - 33 + 8 \\ &= -\frac{19}{3} + 23 = \frac{-19 + 69}{3} = \frac{50}{3}\end{aligned}$$