（1）

P_0は、最初の状態のAから、白を2個取り出す確率である。

$$\therefore P_0=\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

次に1回の作業による遷移を考える。

(i)において

（あ）→（あ）は、「Aで白」または「Aで赤かつBも赤」

$$\therefore \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

（あ）→（い）は、「Aで赤かつBで白」

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

（い）→（あ）は。ありえない。

$$\therefore 0$$

（い）→（い）は、いつでも。

$$\therefore 1$$

(ii)において

（あ）→（あ）は、いつでも。

$$\therefore 1$$

（あ）→（い）は、ありえない。

$$\therefore 0$$

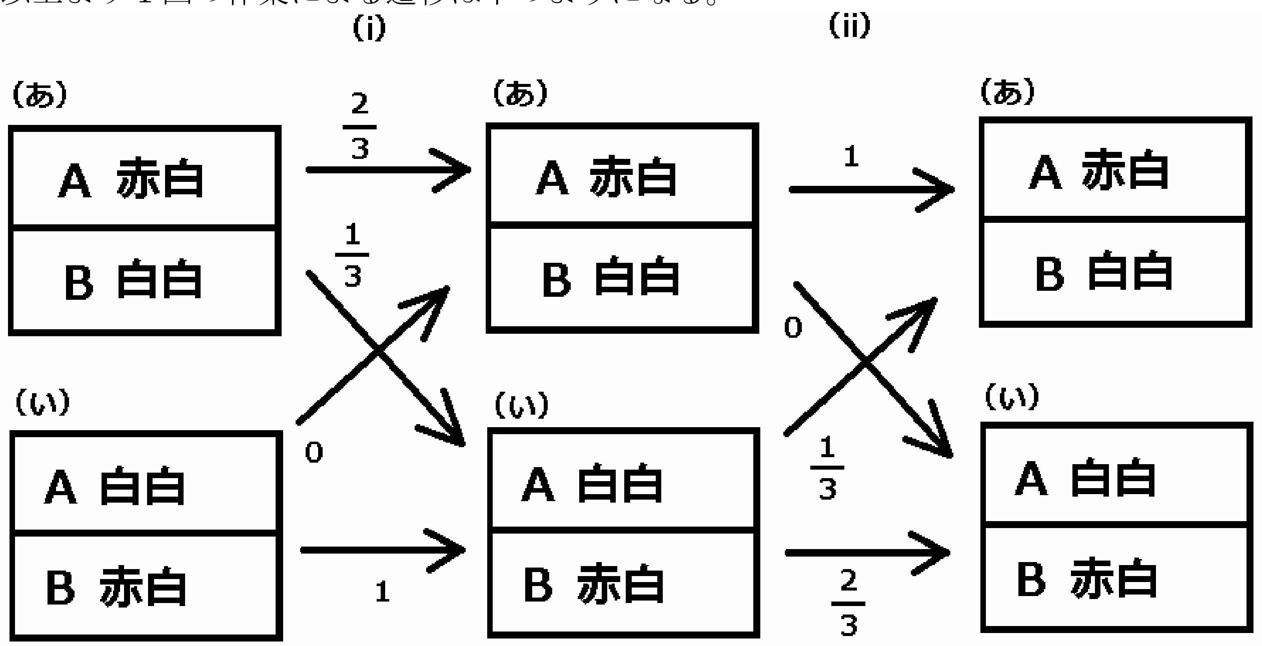
（い）→（あ）は、「Bで赤かつAで白」

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

（い）→（い）は、「Bで白」または「Bで赤かつAで赤」

$$\therefore \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

以上より1回の作業による遷移は下のようになる。



この遷移図を用いて(i)(ii)をまとめた１回の作業でのそれぞれの確率を求める。

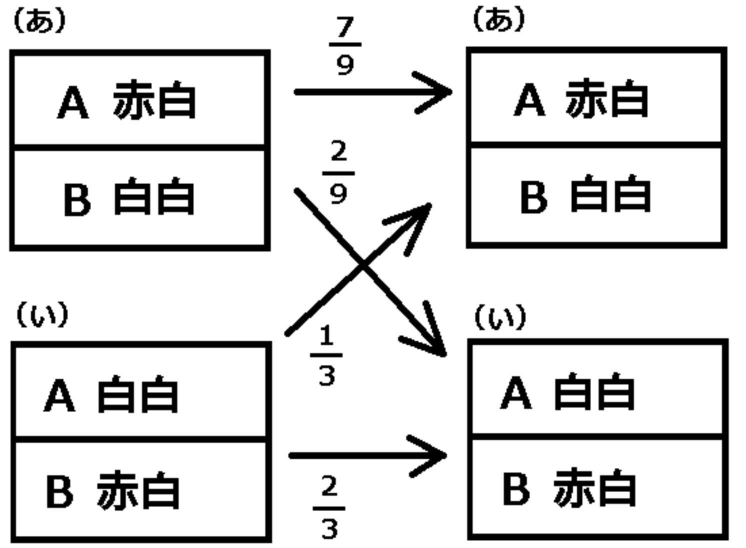
（あ）→（あ）は　$\frac{2}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

（あ）→（い）は　$\frac{2}{3}\times0+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

（い）→（あ）は　$0\times1+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

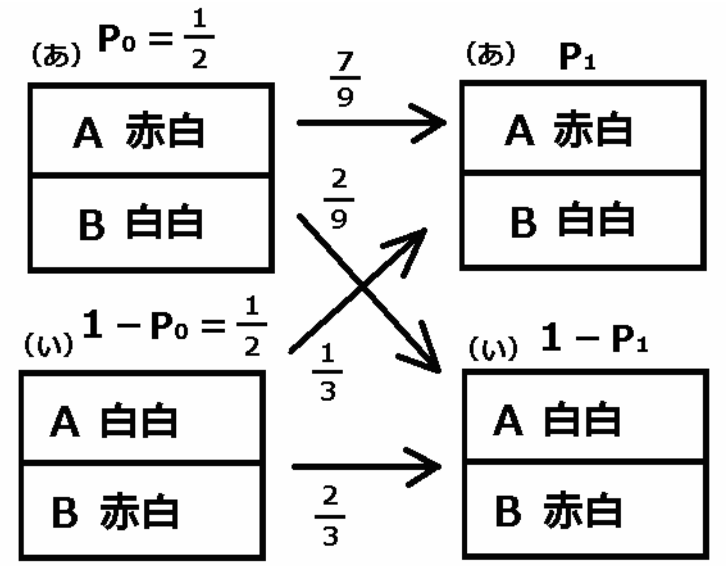
（い）→（い）は　$0\times0+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

つまり、(i)(ii)を合わせた１回の作業では下のような遷移になる。



ここで（1）より、最初の入れ方で（あ）となる確率$P_0=\frac{1}{2}$　なので、（い）となる確率は

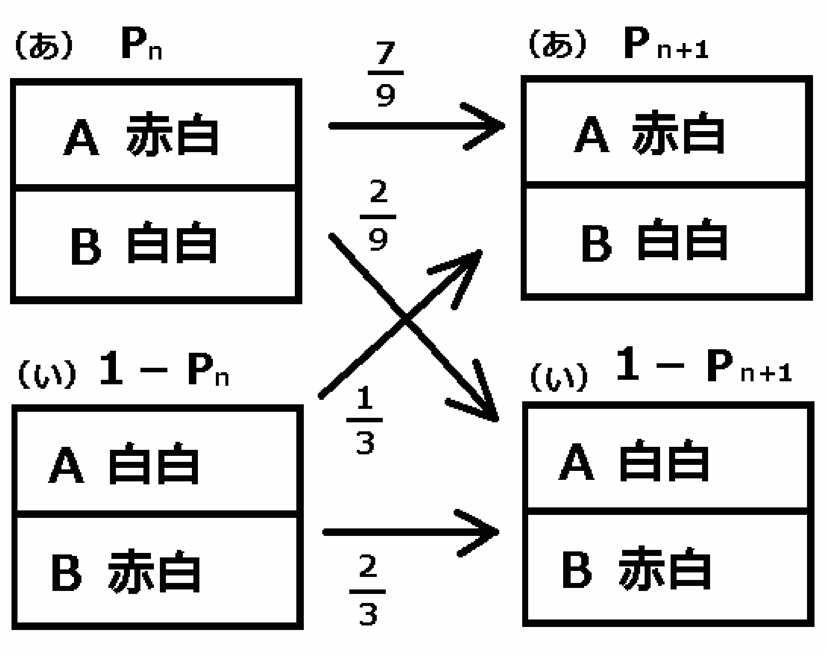
$1-P_0=\frac{1}{2}$　となり、遷移図は下のように書ける。



上の図より　$P_1=\frac{1}{2}\times\frac{7}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

（２）

（１）の遷移図を用いれば、n回後と$(n+1)$回後の遷移図は下のようになる。（$n=0,1,2,\cdots$）



$$P_{n+1}=\frac{7}{9}P_n+\frac{1}{3}(1-P_n)=\frac{4}{9}P_n+\frac{1}{3}$$

つまり、$P_0=\dfrac{1}{2}$　$P_{n+1}=\dfrac{4}{9}P_n+\dfrac{1}{3}$　を解けばよい。

$$P_{n+1}-\frac{3}{5}=\frac{4}{9}\left(P_n-\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore P_n-\frac{3}{5}=\left(P_0-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n=\left(-\frac{1}{10}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \therefore P_n=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

（3）

最初の入れ方が（あ）のときのn回の作業後に（あ）の状態になる確率をq_nを考える。

遷移図は（2）と同じであるので、p_nをq_nに変えて

$$q_{n+1}=\frac{7}{9}q_n+\frac{1}{3}(1-q_n)=\frac{4}{9}q_n+\frac{1}{3}$$

（2）と異なり、最初の入れ方が（あ）と決めているので、$q_0=1$

つまり、$q_0=1\quad q_{n+1}=\frac{4}{9}q_n+\frac{1}{3}$　を解けばよい。

$$q_{n+1}-\frac{3}{5}=\frac{4}{9}\left(q_n-\frac{3}{5}\right)$$

$$q_n-\frac{3}{5}=\left(q_0-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^n=\frac{2}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \therefore q_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

求める確率は

$$\frac{\text{「最初の入れ方が（あ）」かつ「}n\text{回後が（あ）」}}{\text{「}n\text{回後が（あ）」}}=\frac{\frac{1}{2}q_n}{p_n}$$

$$=\frac{\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\left(\frac{4}{9}\right)^n}=\frac{3+2\left(\frac{4}{9}\right)^n}{6-\left(\frac{4}{9}\right)^n}=\frac{3\cdot 9^n+2\cdot 4^n}{6\cdot 9^n-4^n}$$