（1）

$P(x)=ax^2+bx+c$　が整数値整式である　・・・（＊）

（＊）→（A）を示す

（＊）が成り立つので、任意の整数xについて　$P(x)=ax^2+bx+c$　は整数となる。

$\therefore x=-1,0,1$　を代入して

$P(-1)=a-b+c=D$　（Dは整数）・・・①

$P(0)=c=E$　（Eは整数）・・・②

$P(1)=a+b+c=F$　（Fは整数）・・・③

とかける。

①＋③より　$2a+2c=D+F$　これと②より　$2a+2E=D+F$

$$\therefore a=\frac{D+F-2E}{2}$$

③－①より　$2b=F-D$　$\therefore b=\dfrac{F-D}{2}$

$$\therefore P(x)=\frac{D+F-2E}{2}x^2+\frac{F-D}{2}x+E$$

とかける。

ここで

$$m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)=m_0+m_1x+m_2\cdot\frac{1}{2}x(x-1)=\frac{m_2}{2}x^2+\left(m_1-\frac{1}{2}m_2\right)x+m_0$$

とかけるとすると

$$P(x)=\frac{D+F-2E}{2}x^2+\frac{F-D}{2}x+E=\frac{m_2}{2}x^2+\left(m_1-\frac{1}{2}m_2\right)x+m_0$$

これがxについての恒等式なので

$\dfrac{D+F-2E}{2}=\dfrac{m_2}{2}$　かつ　$\dfrac{F-D}{2}=m_1-\dfrac{1}{2}m_2$　かつ　$E=m_0$

$\therefore D+F-2E=m_2$　かつ　$F-D=2m_1-m_2$　かつ　$E=m_0$

つまり

$m_0=E$（整数）　$m_1=F-E$（整数）　$m_2=D+F-2E$（整数）

$\therefore P(x)=ax^2+bx+c$　は

$m_0=E$（整数）　$m_1=F-E$（整数）　$m_2=D+F-2E$（整数）

を用いて　$P(x)=m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)$と書ける。

∴（＊）→（A）は示された。

次に（A）→（＊）を示す。

（A）が成り立つので、整数m_0, m_1, m_2を用いて

$$P(x)=m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)=m_0+m_1x+m_2\cdot\frac{1}{2}x(x-1)$$

とかける。

ここで　$x=n$（整数）とすると

$P(n)=m_0+m_1n+m_2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)$　であり、$n(n-1)$は連続２整数の積なので２の倍数

$\therefore P(n)=m_0+m_1n+m_2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)$　は整数となる。

つまり

$P(x)=m_0+m_1x+m_2\cdot\dfrac{1}{2}x(x-1)=\dfrac{m_2}{2}x^2+\left(m_1-\dfrac{1}{2}m_2\right)x+m_0$　とかけて、整数値整式となる。

∴（A）→（＊）は示された。

以上より、（＊）となる必要十分条件は（A）である。

（２）

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　が整数値整式である　・・・（＊＊）

（＊＊）→（Ｂ）を示す

（＊＊）が成り立つので、任意の整数 x について　$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$　は整数となる。

$\therefore x=-1,0,1,2$　を代入して

$P(-1)=a-b+c+d=D$　（D は整数）・・・④

$P(0)=d=E$　（E は整数）・・・⑤

$P(1)=a+b+c+d=F$　（F は整数）・・・⑥

$P(2)=8a+4b+2c+d=G$　（G は整数）・・・⑦

とかける。

④⑥⑦に⑤を代入して

$a-b+c=D-E$　・・・⑧

$a+b+c=F-E$　・・・⑨

$8a+4b+2c=G-E$　・・・⑩

⑨−⑧より　$2b=F-D$　$\therefore b=\dfrac{F-D}{2}$

次に

⑧＋⑨より　$a+2c=D-2E+F$

⑩＋４×⑧より　$12a+6c=4D-5E+G$

この２式より

$$a=\frac{D+E-3F+G}{6}\quad c=\frac{2D-7E+6F+G}{6}$$

$$\therefore P(x)=\frac{D+E-3F+G}{6}x^3+\frac{F-D}{2}x^2+\frac{2D-7E+6F+G}{6}x+E$$

ここで

$$m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)+m_3f_3(x)=m_0+m_1x+m_2\cdot\frac{1}{2}x(x-1)+\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$=\frac{1}{6}m_3x^3+\left(\frac{1}{2}m_2-\frac{1}{2}m_3\right)x^2+\left(m_1-\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{3}m_3\right)x+m_0$$

とかけるとすると

$$P(x)=\frac{D+E-3F+G}{6}x^3+\frac{F-D}{2}x^2+\frac{2D-7E+6F+G}{6}x+E$$

$$=\frac{1}{6}m_3x^3+\left(\frac{1}{2}m_2-\frac{1}{2}m_3\right)x^2+\left(m_1-\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{3}m_3\right)x+m_0$$

これがxについての恒等式なので

$$\frac{D+E-3F+G}{6}=\frac{m_3}{6}$$ かつ $$\frac{F-D}{2}=\frac{1}{2}m_2-\frac{1}{2}m_3$$

かつ $$\frac{2D-7E+6F+G}{6}=m_1-\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{3}m_3$$ かつ $$E=m_0$$

これら４式より

$m_3=D+E-3F+G$（整数）

$m_2=E-2F+G$（整数）

$m_0=E$（整数）

$m_1=F-E$（整数）

$\therefore P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ は

$m_0=E$（整数）、$m_1=F-E$（整数）、$m_2=E-2F+G$（整数）、

$m_3=D+E-3F+G$（整数） とおくと

$P(x)=m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)+m_3f_3(x)$と書ける。

∴（＊＊）→（B）は示された。

次に（B）→（＊＊）を示す。

（B）が成り立つので、整数m_0,m_1,m_2,m_3を用いて

$$P(x)=m_0+m_1f_1(x)+m_2f_2(x)+m_3f_3(x)$$

$$=m_0+m_1x+m_2\cdot\frac{1}{2}x(x-1)+m_3\cdot\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

とかける。

ここで $x=n$（整数）とすると

$P(n)=m_0+m_1n+m_2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+m_3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ であり、

$n(n-1)$は連続２整数の積なので２の倍数、

$n(n-1)(n-2)$は連続３整数の積なので２の倍数かつ３の倍数、つまり６の倍数なので

$\therefore P(n)=m_0+m_1n+m_2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+m_3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ は整数となる。

つまり

$$P(x)=m_0+m_1x+m_2\cdot\frac{1}{2}x(x-1)+m_3\cdot\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$=\frac{1}{6}m_3x^3+\left(\frac{1}{2}m_2-\frac{1}{2}m_3\right)x^2+\left(m_1-\frac{1}{2}m_2+\frac{1}{3}m_3\right)x+m_0$$

とかけて、整数値整式となる。∴（B）→（＊＊）は示された。

以上より、（＊＊）となる必要十分条件は（B）である。