（1）

Oを始点とする位置ベクトルで考える。

つまり、$A(\vec{a}),B(\vec{b}),P(\vec{p}),P'(\vec{p'}),Q(\vec{q}),Q'(\vec{q'}),R(\vec{r}),R'(\vec{r'})$とする。

PはOAを$p:(1-p)$に内分するので　$\vec{p}=p\vec{a}$

$p\neq\dfrac{1}{2}$で、P'はOAを$p:(1-p)$に外分するので　$\vec{p'}=\dfrac{p\vec{a}}{p-(1-p)}=\dfrac{p\vec{a}}{2p-1}$

QはABを$q:(1-q)$に内分するので　$\vec{q}=(1-q)\vec{a}+q\vec{b}$

$q\neq\dfrac{1}{2}$で、Q'はABを$q:(1-q)$に外分するので　$\vec{q'}=\dfrac{-(1-q)\vec{a}-q\vec{b}}{q-(1-q)}=\dfrac{(q-1)\vec{a}+q\vec{b}}{2q-1}$

RはBOを$r:(1-r)$に内分するので　$\vec{r}=(1-r)\vec{b}$

$r\neq\dfrac{1}{2}$で、R'はBOを$r:(1-r)$に外分するので　$\vec{r'}=\dfrac{-(1-r)\vec{b}}{r-(1-r)}=\dfrac{(r-1)\vec{b}}{2r-1}$

$\triangle OAB$の重心$G(\vec{g})$　は　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$　・・・①

$\triangle PQR$の重心$H(\vec{h})$　は

$$\vec{h}=\frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}=\frac{1}{3}\left\{p\vec{a}+(1-q)\vec{a}+q\vec{b}+(1-r)\vec{b}\right\}\ \cancel{/\!/}$$

$$=\frac{1}{3}(p-q+1)\vec{a}+\frac{1}{3}(q-r+1)\vec{b}\ ・・・②$$

$\triangle OAB$の重心$G(\vec{g})$と$\triangle PQR$の重心$H(\vec{h})$が一致するとき、

$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$、$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$　なので、①②より

$\dfrac{1}{3}(p-q+1)=\dfrac{1}{3}$　かつ　$\dfrac{1}{3}(q-r+1)=\dfrac{1}{3}$

$\therefore p=q$　かつ　$q=r$　$\therefore p=q=r$　$\therefore p:q:r=1:1:1$

（２）

$\overrightarrow{P'Q'} \nparallel \overrightarrow{P'R'}$ なので、$\triangle P'Q'R'$ の重心 $I(\vec{i})$ は存在して

$$\vec{i}=\frac{\overrightarrow{p'}+\overrightarrow{q'}+\overrightarrow{r'}}{3}=\frac{1}{3}\left\{\frac{p}{2p-1}\vec{a}+\frac{(q-1)\vec{a}+q\vec{b}}{2q-1}+\frac{r-1}{2r-1}\vec{b}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2p-1}+\frac{q-1}{2q-1}\right)\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{q}{2q-1}+\frac{r-1}{2r-1}\right)\vec{b}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

$\triangle OAB$ の重心 $G(\vec{g})$ と $\triangle P'Q'R'$ の重心 $I(\vec{i})$ が一致するとき、

$\vec{a}\neq\vec{0}$、$\vec{b}\neq\vec{0}$、$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ なので、①③より

$$\frac{1}{3}\left(\frac{p}{2p-1}+\frac{q-1}{2q-1}\right)=\frac{1}{3}\quad かつ\quad \frac{1}{3}\left(\frac{q}{2q-1}+\frac{r-1}{2r-1}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\frac{p}{2p-1}+\frac{q-1}{2q-1}=1\quad かつ\quad \frac{q}{2q-1}+\frac{r-1}{2r-1}=1$$

それぞれの両辺に、$(2p-1)(2q-1)$、$(2q-1)(2r-1)$ をそれぞれかけて

$$p(2q-1)+(q-1)(2p-1)=(2p-1)(2q-1)$$

かつ

$$q(2r-1)+(r-1)(2q-1)=(2q-1)(2r-1)$$

$$\therefore 2pq-p+2pq-q-2p+1=4pq-2p-2q+1$$

かつ

$$2qr-q+2qr-r-2q+1=4qr-2q-2r+1$$

$\therefore p=q$ かつ $q=r$ $\therefore p=q=r$

∴（１）より $\triangle OAB$ の重心 $G(\vec{g})$ と $\triangle PQR$ の重心 $H(\vec{h})$ は一致する。

∴題意は示された。

（３）

$\overrightarrow{P'Q'} \nparallel \overrightarrow{P'R'}$ なので

$\overrightarrow{P'Q'} = k\overrightarrow{P'R'}$ （k は実数）とかける。

つまり

$$\overrightarrow{q'} - \overrightarrow{p'} = k\left(\overrightarrow{r'} - \overrightarrow{p'}\right)$$

つまり

$$\frac{(q-1)\vec{a}+q\vec{b}}{2q-1} - \frac{p\vec{a}}{2p-1} = k\left\{\frac{(r-1)\vec{b}}{2r-1} - \frac{p\vec{a}}{2p-1}\right\}$$

つまり

$$\left(\frac{q-1}{2q-1} - \frac{p}{2p-1}\right)\vec{a} + \frac{q}{2q-1}\vec{b} = -\frac{kp}{2p-1}\vec{a} + \frac{k(r-1)}{2r-1}\vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$、$\vec{b} \neq \vec{0}$、$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ なので、

$$\frac{q-1}{2q-1} - \frac{p}{2p-1} = -\frac{kp}{2p-1} \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

かつ

$$\frac{q}{2q-1} = \frac{k(r-1)}{2r-1} \quad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

$0 < r < 1$ と⑤より

$$k = \frac{q(2r-1)}{(2q-1)(r-1)}$$

これを④に代入して k を消去すると

$$\frac{q-1}{2q-1} - \frac{p}{2p-1} = -\frac{p}{2p-1} \cdot \frac{q(2r-1)}{(2q-1)(r-1)}$$

両辺に $(2p-1)(2q-1)(r-1)$ をかけて

$$(2p-1)(r-1)(q-1) - p(2q-1)(r-1) = -pq(2r-1)$$

$$\therefore (2pr-2p-r+1)(q-1) - p(2qr-2q-r+1) = -2pqr + pq$$
$$\therefore 2pqr - 2pr - 2pq + 2p - qr + r + q - 1 - 2pqr + 2pq + pr - p = -2pqr + pq$$
$$\therefore -pr - qr + p + q + r - 1 = -2pqr + pq$$
$$\therefore 2pqr + p + q + r = pq + qr + rp + 1$$

∴題意は示された