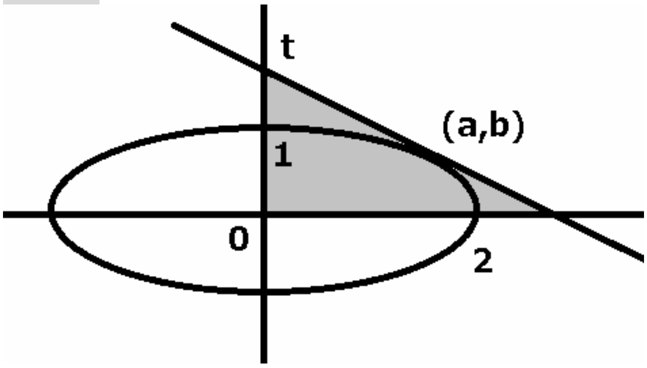
（1）



$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　上の第１象限の点(a,b)における接線lの式は

$\dfrac{ax}{4}+by=1$　（$a>0, b>0$）　・・・①

①に　$y=0$　を代入して　$x=\dfrac{4}{a}$　∴接線lとx軸との交点は$\left(\dfrac{4}{a},0\right)$

ここで、①が　$(0,t)$　（$t>1$）を通るので　$\dfrac{a\cdot 0}{4}+bt=1$　$\therefore b=\dfrac{1}{t}$　・・・②

(a,b)は、$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上にあるので　$\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$　$\therefore \dfrac{a^2}{4}=1-b^2=1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2-1}{t^2}$

$\therefore a^2=\dfrac{4(t^2-1)}{t^2}$　　$a>0$なので　$a=\sqrt{\dfrac{4(t^2-1)}{t^2}}=\dfrac{2\sqrt{t^2-1}}{t}$　・・・③

∴求める面積は上図より　$S_1(t)=\dfrac{4}{a}\times t\times\dfrac{1}{2}=2t\times\dfrac{t}{2\sqrt{t^2-1}}=\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}$　（$t>1$）

$$S_1'(t)=\left(\frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\right)'=\frac{2t\sqrt{t^2-1}-\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t\cdot t^2}{\left(\sqrt{t^2-1}\right)^2}=\frac{2t(t^2-1)-t^3}{\left(t^2-1\right)\sqrt{t^2-1}}$$

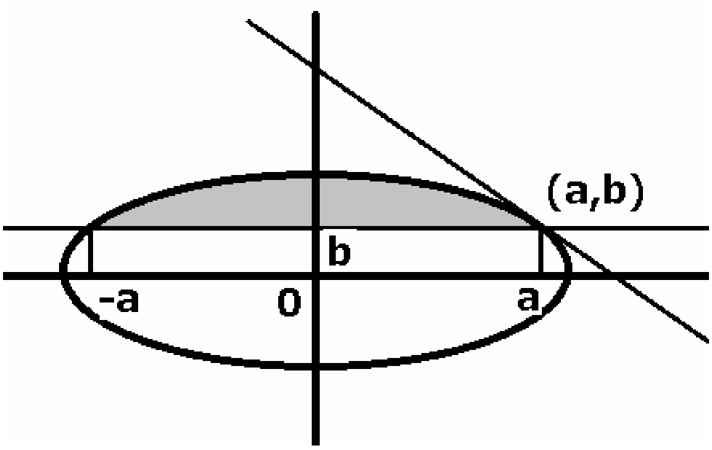
$$=\frac{t^3-2t}{\left(t^2-1\right)\sqrt{t^2-1}}=\frac{t(t^2-2)}{\left(t^2-1\right)\sqrt{t^2-1}}=\frac{t(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})}{\left(t^2-1\right)\sqrt{t^2-1}}$$

∴増減表は以下のようになる。

t	1	・・・	$\sqrt{2}$	・・・
$S_1'(t)$		−	0	+
$S_1(t)$		↘	2	↗

増減表より　$t=\sqrt{2}$　のとき　最小値　2

（2）



上図より

$$S_2(t)=\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx-2ab=2\int_{0}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx-2ab$$

$$\therefore S_2'(t)=2\frac{d}{dt}\int_{0}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx-2\frac{d}{dt}ab$$

$$=2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}\cdot\frac{da}{dt}-2\left(\frac{da}{dt}b+a\frac{db}{dt}\right)$$

$$=2b\cdot\frac{da}{dt}-2\left(\frac{da}{dt}b+a\frac{db}{dt}\right)=-2a\cdot\frac{db}{dt}\quad\cdot\cdot\cdot④$$

$\because \dfrac{a^2}{4}+b^2=1$ より $b^2=1-\dfrac{a^2}{4}$ だから

ここで

$$a=\frac{2\sqrt{t^2-1}}{t}$$

$$\frac{db}{dt}=-1\cdot t^{-2}=-\frac{1}{t^2}$$

なので、これらを④に代入して

$$S_2'(t)=-2\cdot\frac{-1}{t^2}\cdot\frac{2\sqrt{t^2-1}}{t}=\frac{4\sqrt{t^2-1}}{t^3}$$

$$\therefore S_2''(t)=\left(\frac{4\sqrt{t^2-1}}{t^3}\right)'=4\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t\cdot t^3-3t^2\cdot\sqrt{t^2-1}}{\left(t^3\right)^2}$$

$$=4\cdot\frac{t^4-3t^2\left(t^2-1\right)}{t^6\sqrt{t^2-1}}=4\cdot\frac{-2t^4+3t^2}{t^6\sqrt{t^2-1}}=\frac{-4t^2(2t^2-3)}{t^6\sqrt{t^2-1}}=\frac{-8\left(t^2-\frac{3}{2}\right)}{t^4\sqrt{t^2-1}}$$

$$=\frac{-8\left(t+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(t-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{t^4\sqrt{t^2-1}}$$

∴増減表は以下のようになる。

t	1	・・・	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	・・・
$S_2''(t)$		$+$	0	$-$
$S_2'(t)$		↗		↘

増減表より　$t=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$　のとき　最大値　$\dfrac{4\sqrt{\frac{3}{2}-1}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\dfrac{4\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}=\dfrac{8}{9}\sqrt{3}$