２０１５年2月２５日　２０１

第２問

（１）

$n \geqq 2$　のとき　$S_n = \frac{1}{3}(2a_n + 8a_{n-1})$　・・・①

なので

$n \geqq 3$　のとき　$S_{n-1} = \frac{1}{3}(2a_{n-1} + 8a_{n-2})$　・・・②

① －②より　$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{3}(2a_n + 8a_{n-1}) - \frac{1}{3}(2a_{n-1} + 8a_{n-2})$

$\therefore a_n = \frac{2}{3}a_n + 2a_{n-1} - \frac{8}{3}a_{n-2}$　$\therefore \frac{1}{3}a_n = 2a_{n-1} - \frac{8}{3}a_{n-2}$　$\therefore a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$

（２）

（１）より　$n \geqq 3$　のとき　$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$　なので、変形して

$a_n - 2a_{n-1} = 4a_{n-1} - 8a_{n-2} = 4(a_{n-1} - 2a_{n-2})$

これを繰り返し用いると

$a_n - 2a_{n-1} = 4(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 4^2(a_{n-2} - 2a_{n-3}) = \cdots = 4^{n-2}(a_2 - 2a_1)$

（３）

（１）より

$n \geqq 3$　のとき　$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$　なので

$n \geqq 1$　のとき　$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$

これを変形すると

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 4a_{n+1} - 8a_n = 4(a_{n+1} - 2a_n)$　・・・③

$a_{n+2} - 4a_{n+1} = 2a_{n+1} - 8a_n = 2(a_{n+1} - 4a_n)$　・・・④

③より　$\{a_{n+1} - 2a_n\}$は、初項$a_2 - 2a_1$、公比４の等比数列　・・・⑤

④より　$\{a_{n+1} - 4a_n\}$は、初項$a_2 - 4a_1$、公比２の等比数列　・・・⑥

ここで

①に　$n = 2$を代入すると　$S_2 = \frac{1}{3}(2a_2 + 8a_1)$　$\therefore a_1 + a_2 = \frac{1}{3}(2a_2 + 8a_1)$　$\therefore 3a_1 + 3a_2 = 2a_2 + 8a_1$

$\therefore a_2 = 5a_1$

$a_1 = 1$　・・・⑦

より

$a_2 = 5a_1 = 5$　・・・⑧

⑤⑦⑧より　$a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$　・・・⑨

⑥⑦⑧より　$a_{n+1} - 4a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$　・・・⑩

⑨－⑩より　$2a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}$

$\therefore a_n = \frac{3 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1}}{2}$