２０１５年2月２５日　２０１

第１問

（１）

$m=\tan\dfrac{x}{2}$

$$\sin x=\sin 2\cdot\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\left(\tan\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=2m\cdot\frac{1}{1+m^2}=\frac{2m}{1+m^2}$$

$$\cos x=\cos 2\cdot\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}-1=2\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1=\frac{2}{1+m^2}-1=\frac{2-(1+m^2)}{1+m^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}$$

（２）

（１）より　$m=\tan\dfrac{x}{2}$　として、

$$（左辺）－（右辺）=\sin x+\cos x-\tan\frac{x}{2}=\frac{2m}{1+m^2}+\frac{1-m^2}{1+m^2}-m=\frac{2m+1-m^2-m(1+m^2)}{1+m^2}$$

$$=\frac{-m^3-m^2+m+1}{1+m^2}=f(m)\quad・・・①$$

また　$-\pi<x<\dfrac{\pi}{2}$　なので　$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$　より　$m=\tan\dfrac{x}{2}<1$　・・・②

∴①、②より　$f(m)=\dfrac{-m^3-m^2+m+1}{1+m^2}$　が　$m<1$　において　$f(m)=\dfrac{-m^3-m^2+m+1}{1+m^2}\geqq 0$　を示せばよい。

つまり　$1+m^2>0$ なので　$m<1$　において　$g(m)=-m^3-m^2+m+1\geqq 0$　を示せばよい。

$g'(m)=-3m^2-2m+1=-(3m-1)(m+1)$　となるので増減表は以下のようになる。

m		-1		$\frac{1}{3}$		1
$g'(m)$	−	0	＋	0	−	
$g(m)$	↘	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0

∴ $m<1$　において　$g(m)=-m^3-m^2+m+1\geqq 0$

∴ $m<1$　において（左辺）－（右辺）$=\dfrac{-m^3-m^2+m+1}{1+m^2}\geqq 0$

∴題意は示された。